F

Dipartimento di Matem..ica
giuliano@dm.unipi.it

ricevimento venerdi ore 15 – 18
oppure su appuntamento

23 settembre
27 settembre
30 settembre

lezione

↓

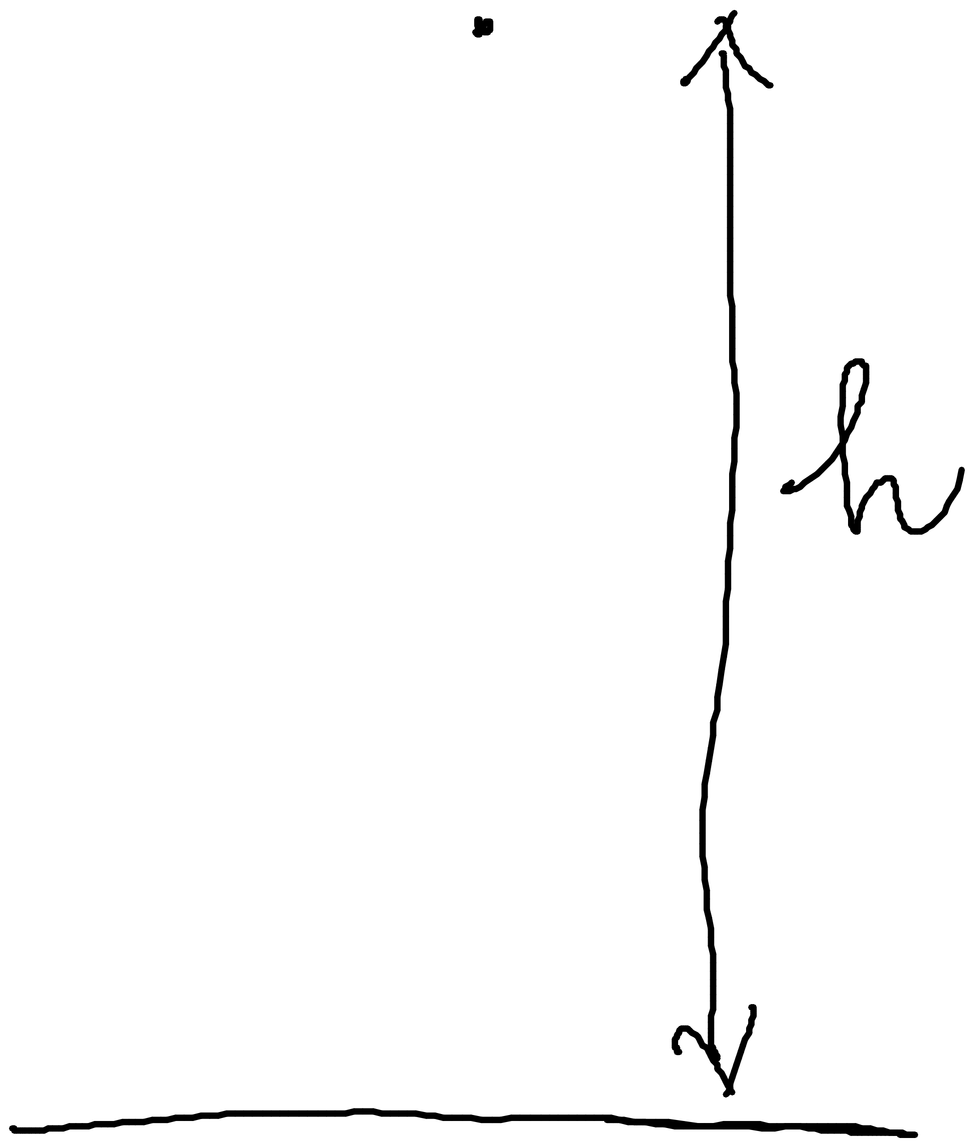
venerdi successivo → esercitazione

KOLMOGOROV

fenomeno aleatorio

fenomeno deterministico

aleatorio = casuale



$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

$$t^2 = \frac{2s}{g}$$

$$t = \sqrt{\frac{2\cancel{s}h}{g}}$$

T	C
1	0

$\{1, 0\}$

$1 \longmapsto \frac{1}{2}$

$0 \longmapsto \frac{1}{2}$

Si lancia 2 volte una moneta equilibrata

$$\to \{(1,1),\ (1,0),\ (0,1),\ (0,0)\}$$

$$\{(1,1)\} \longmapsto \frac{1}{4}$$

$$(1,0) \longmapsto \frac{1}{4}$$

$$(0,1) \longmapsto \frac{1}{4}$$

$$(0,0) \longmapsto \frac{1}{4}$$

Probabilità che esca 1 almeno una volta

$$\{(1,0)\ (0,1)\ (1,1)\} \longmapsto \frac{3}{4}$$

Prob. che esca 0 esattamente una volta

$$\{(1,0),\ (0,1)\} \longmapsto \frac{2}{4}$$

Ω = insieme dei possibili risultati dell'esperimento

= spazio campione

$A \subseteq \Omega$

$A \longmapsto P(A)$

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Omega = \{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Omega = \{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$$

$$\Omega \longmapsto 1$$

$$\{(1,1)\} \longmapsto \frac{1}{4}$$

$$\{(1,0)\} \longmapsto \frac{1}{4}$$

$$\{(0,1)\} \longmapsto \frac{1}{4}$$

$$\{(0,0)\} \longrightarrow \frac{1}{4}$$

$$\{(1,0),(0,1)\} \longmapsto \frac{1}{2}$$

$$\{(1,0),(1,1)\} \longmapsto \frac{1}{2}$$

$$\{(1,0),(0,0)\} \longmapsto \frac{1}{2}$$

$$\{(0,1)(1,1)\} \longmapsto \frac{1}{2}$$

$$\{(0,1)(0,0)\} \longmapsto \frac{1}{2}$$

$$\{(1,1)(0,0)\} \longmapsto \frac{1}{2}$$

$$\{(0,1),(1,0),(0,0)\} \rightarrow \frac{3}{4}$$

$$\{(1,1),(0,1)(0,0)\} \rightarrow \frac{3}{4}$$

$$\{(1,1),(1,0),(0,0)\} \rightarrow \frac{3}{4}$$

$$\{(1,1),(1,0),(0,1)\} \rightarrow \frac{3}{4}$$

$$\emptyset \longmapsto 0$$

$(\underline{\Omega}, \mathcal{A}, P)$ spazio di probabilità =

<u>non</u> è lo spazio campione

$$\Omega$$

Assegnato un insieme Ω

<u>Definizione</u>. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

è una σ- algebra (di sottoinsiemi di Ω) se

sigma algebra

- (i) $\Omega \in \mathcal{A}$
- (ii) se $A \in \mathcal{A}$, allora $A^c \in \mathcal{A}$
- (iii) Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione

di elementi di $\mathcal{A}$, anche

$$\longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

$A \in \mathcal{A}$ = "A è un evento"

$B \in \mathcal{A}$

$A \cup B$

$(\Omega, \mathcal{A}, \quad)$

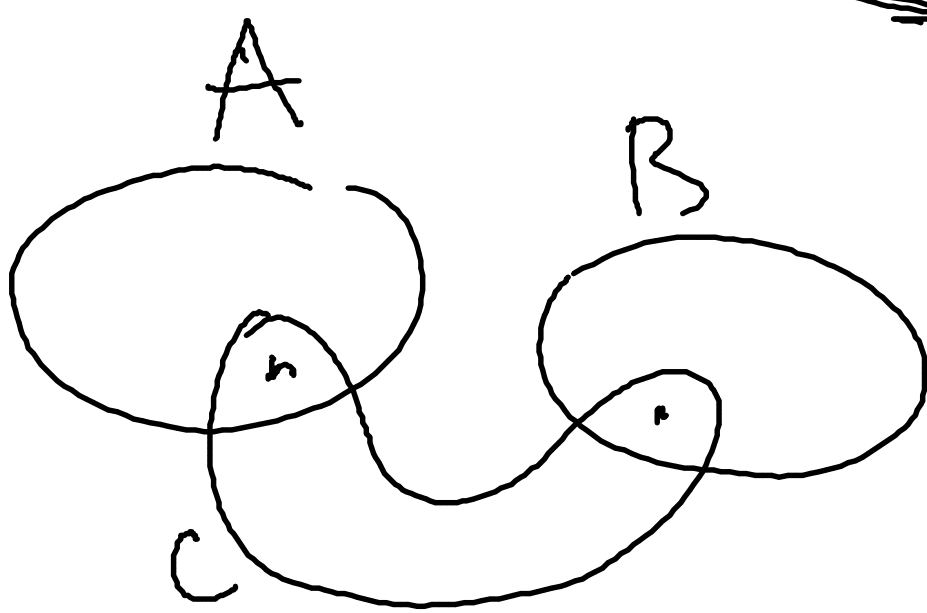
<u>Definizione</u>. $P : \underline{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ è una "probabilità" se

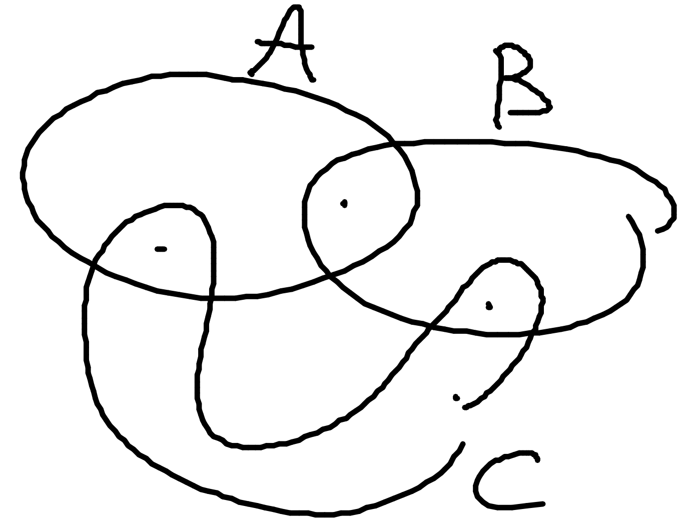
(i) $P(\Omega) = 1$

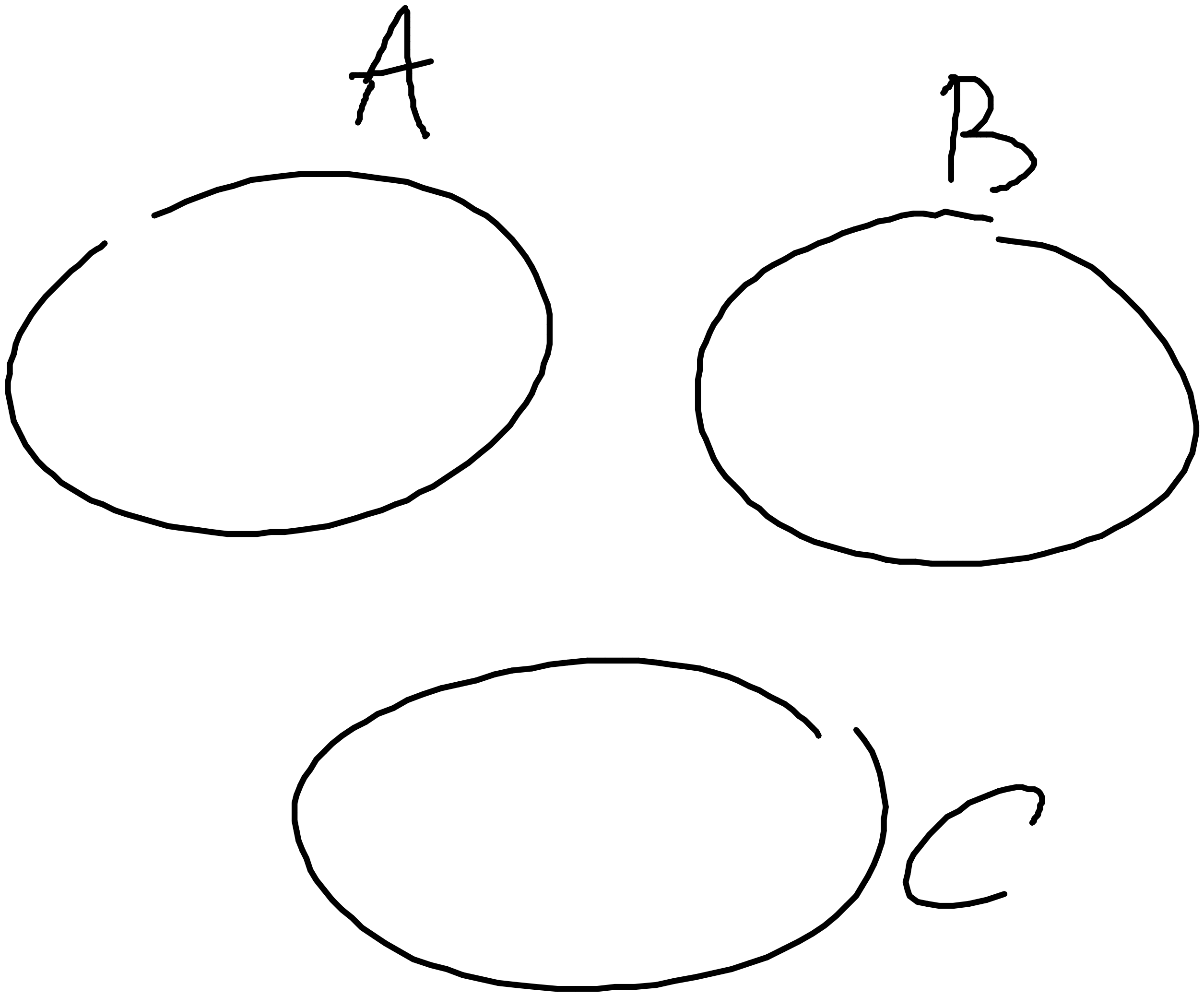
(ii) Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di elementi di $\mathcal{A}$

due a due disgiunti, allora

$$\cdot\, P\Big(\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}_{\in \mathcal{A}}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$



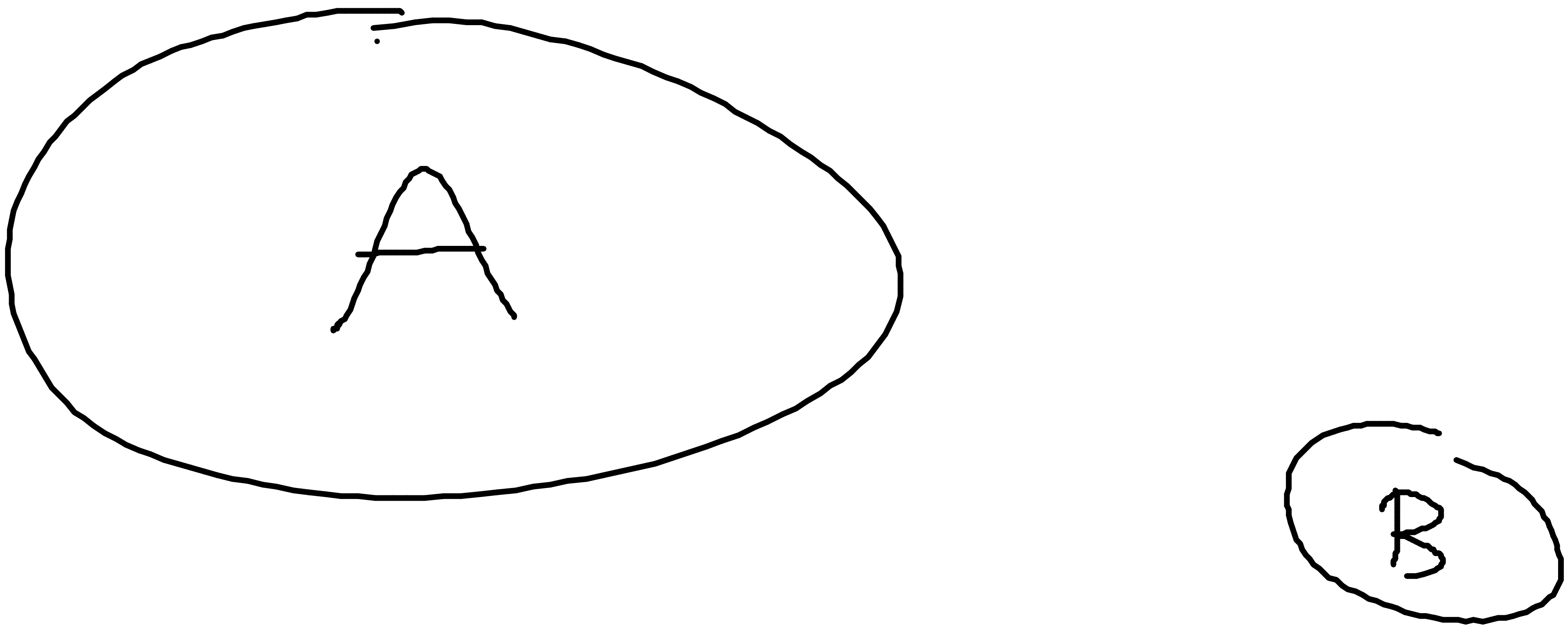




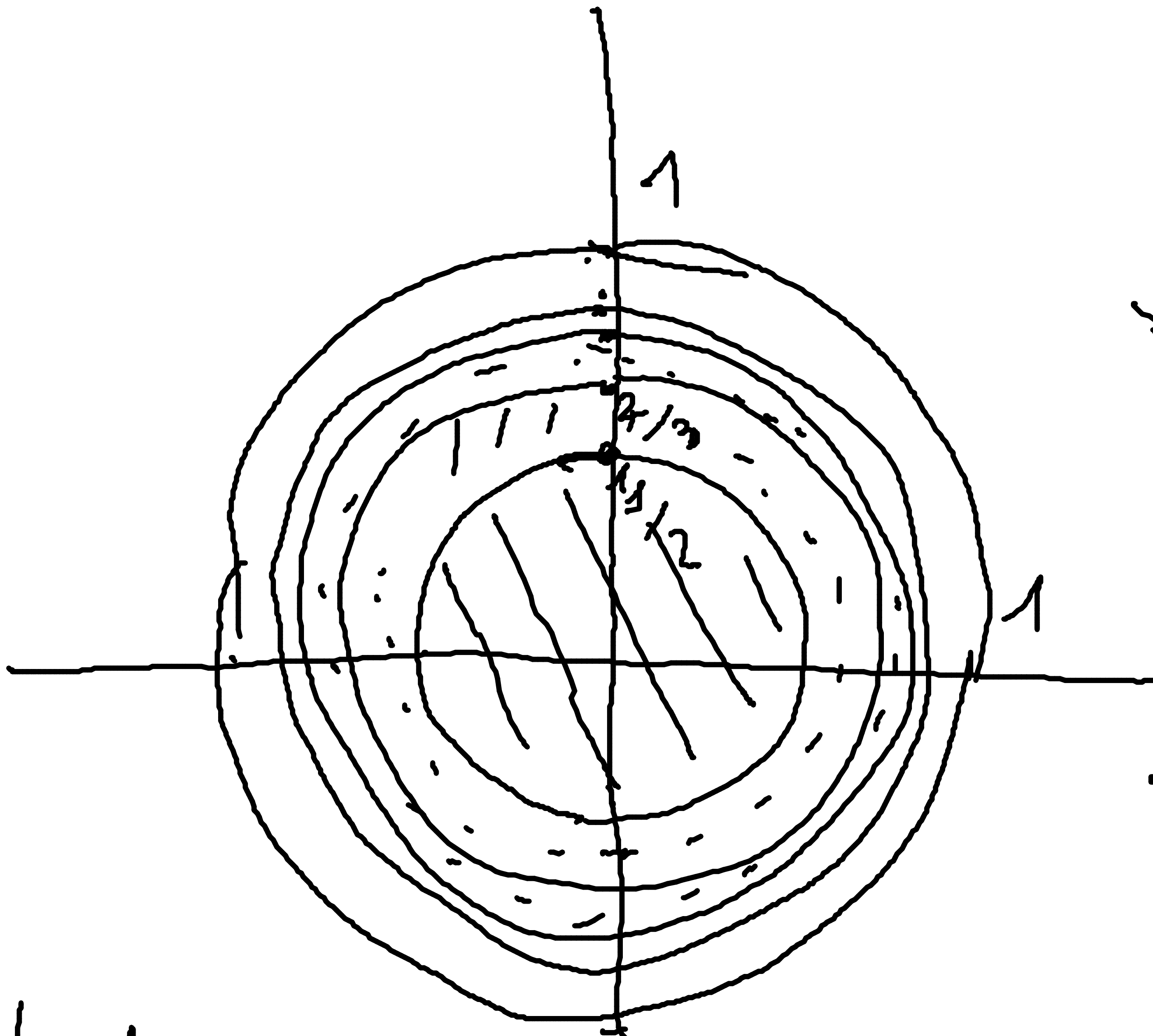
$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{per } i \neq j$$

σ- additività

(ii') Se A e B sono due elementi di $\mathcal{A}_0$, con $A \cap B = \emptyset$ allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



$$\text{area}(A \cup B) = \text{area}(A) + \text{area}(B)$$



$1-\frac{1}{n}$ $\qquad n \geq 2$

$\cancel{\pi\left(\frac{1}{4}\right)}$

$\cancel{\pi\left(\frac{2}{3}\right)^2} - \cancel{\pi\left(\frac{1}{4}\right)}$

$\cancel{\pi\left(\frac{3}{4}\right)^2} - \pi\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$\vdots$

$\pi\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - \pi\left(\quad\right)^2$

$\bigcup A_n$

$A, B, C \in \mathcal{A}$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B = \emptyset \\ A \cap C = \emptyset \\ B \cap C = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow (A \cup B) \cap C = \emptyset$$

$$P(\underbrace{(A \cup B)}\cup \underbrace{C}) = \underbrace{P(A \cup B)} + P(C)$$

$$= P(A) + P(B) + P(C)$$

- $A = \{\text{esce 1 al primo lancio}\}$
  $= \{(1,0), (1,1)\}$

- $B = \{\text{esce due volte lo stesso risult}\}$
  $= \{(1,1), (0,0)\}$

- $A \cup B = \{(1,1), (0,0), (1,0)\}$

$\mathcal{A}$ famiglia di sottoinsiemi di Ω

$$\underline{\underline{\mathcal{A}}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$

$=$ insieme di tutti i sottoinsiemi di Ω

$$A \in \mathcal{A}, \quad B \in \mathcal{A}, \quad C \in \mathcal{A}$$

$$\Longrightarrow A \cup B \cup C \in \mathcal{A}$$

* (iii') Se $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

$$\underbrace{\underbrace{(A \cup B)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{C}_{\in \mathcal{A}}}_{\in \mathcal{A}}$$